

因式分解的应用（加油站）

一、公式法的应用

1. 若 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三边，满足 $a^2 - 2ab + b^2 = 0$ 且 $b^2 - c^2 = 0$ ，则 $\triangle ABC$ 的形状是（ ）。
- A. 直角三角形 B. 等腰三角形 C. 等腰直角三角形 D. 等边三角形

【答案】D

【解析】 $\because a^2 - 2ab + b^2 = 0$ 且 $b^2 - c^2 = 0$ ，
 $\therefore (a - b)^2 = 0$ 且 $(b + c)(b - c) = 0$ ，
 $\therefore a = b$ 且 $b = c$ ，即 $a = b = c$ ，
 $\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形。
故选D。

【标注】【知识点】因式分解的应用

2. 分解因式： $(a - 1)(a - 2)(a - 3)(a - 4) - 24$ （ ）。
- A. $a(a - 5)(a^2 - 5a + 10)$ B. $a(a - 4)(a^2 - 5a + 10)$
C. $a(a - 5)(a^2 - 3a + 10)$ D. $a(a - 5)(a^2 - 5a - 10)$

【答案】A

【解析】 $(a - 1)(a - 2)(a - 3)(a - 4) - 24$
 $= (a^2 - 5a + 4)(a^2 - 5a + 6) - 24$
 $= (a^2 - 5a)(a^2 - 5a + 10)$
 $= a(a - 5)(a^2 - 5a + 10)$
故选A。

【标注】【知识点】换元法

3. 马小虎同学做了一道因式分解的习题，做完之后，不小心让墨水把等式： $a^4 - \blacksquare$
 $= (a^2 + 4)(a + 2)(a - \blacktriangle)$ 中的两个数字盖住了，那么式子中的 $\blacksquare$ 、 $\blacktriangle$ 处对应的两个数字分别是（ ）。

A. 64 , 8

B. 24 , 3

C. 16 , 2

D. 8 , 1

【答案】 C**【标注】**【知识点】利用平方差公式因式分解

4. 计算 $\frac{2013^3 - 2 \times 2013^2 - 2011}{2013^3 + 2013^2 - 2014}$.

A. $\frac{2013}{2014}$ B. $\frac{2011}{2014}$

C. $\frac{2009}{2014}$

D. $\frac{2007}{2014}$

【答案】 B**【解析】** 原式

$$= \frac{2013^2(2013 - 2) - 2011}{2013^2(2013 + 1) - 2014} = \frac{2013^2 \times 2011 - 2011}{2013^2 \times 2014 - 2014} = \frac{2011(2013^2 - 1)}{2014(2013^2 - 1)} = \frac{2011}{2014}$$

【标注】【知识点】公式法综合应用

5. 如果 a 、 b 是整数，且 $x^2 + x - 1$ 是 $ax^3 + bx + 1$ 的因式，则 b 的值为 _____ .

【答案】 -2**【解析】** 由题意，可得

$$(ax - 1)(x^2 + x - 1) = ax^3 + bx + 1 ,$$

$$ax^3 + ax^2 - ax - x^2 - x + 1 = ax^3 + bx + 1 ,$$

$$ax^3 + (a - 1)x^2 - (a + 1)x + 1 = ax^3 + bx + 1 ,$$

$$\therefore a - 1 = 0 , -(a + 1) = b ,$$

$$\therefore a = 1 , b = -2 .$$

故 b 的值为-2 .

【标注】【知识点】因式分解的应用

6. 分解因式： $1 + x + x(x + 1) + x(x + 1)^2 + \dots + x(x + 1)^n =$ _____ . (n 为正整数)

【答案】 $(x + 1)^{n+1}$ **【解析】** 设原式为 $S = (1 + x) + x(x + 1) + x(x + 1)^2 + \dots + x(x + 1)^n$

$$\begin{aligned}
 &= (x+1)^2 + x(x+1)^2 + \cdots + x(x+1)^n \\
 &= (x+1)^3 + \cdots + x(x+1)^n \\
 &= (x+1)^n + x(x+1)^n = (x+1)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】因式分解的应用

7. 已知 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三边，且满足 $a^2 + b^2 + c^2 + 57 = 8a + 8b + 10c$ ，请你判断 $\triangle ABC$ 的形状。

【答案】等腰三角形。

【解析】 $a^2 + b^2 + c^2 + 57 = 8a + 8b + 10c$

$$a^2 - 8a + b^2 - 8b + c^2 - 10c + 57 = 0$$

$$a^2 - 8a + 16 + b^2 - 8b + 16 + c^2 - 10c + 25 = 0$$

$$(a-4)^2 + (b-4)^2 + (c-5)^2 = 0$$

$$a = 4, b = 4, c = 5.$$

则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形。

【标注】【知识点】因式分解的应用

8. 已知 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且有 $a^2 + 2b^2 + c^2 = 2b(a+c)$ ，试判断三角形的形状。

【答案】等边三角形。

【解析】 $\because a^2 + 2b^2 + c^2 - 2b(a + c) = 0$,

$$\therefore a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ab - 2bc = 0,$$

$$\therefore (a - b)^2 + (b - c)^2 = 0,$$

$$\therefore a = b \text{ 且 } b = c$$

$$\text{即: } a = b = c,$$

故此三角形为等边三角形.

【标注】【知识点】因式分解的应用

9. 已知 $a + b + c = 0$, 求证: $2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$.

【答案】 证明见解析.

【解析】 左-右 $= 2(a^4 + b^4 + c^4) - (a^2 + b^2 + c^2)^2$,
 $= a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2$
 $= (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2$
 $= (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)$
 $= [a^2 - (b - c)^2][a^2 - (b + c)^2]$
 $= (a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(a - b - c)$
 $= 0$
 $\therefore$ 等式成立.

【标注】【知识点】因式分解的应用

10. 先阅读材料, 再解答下列问题:

材料: 因式分解 $(x + y)^2 + 2(x + y) + 1$.

解: 将 " $x + y$ " 看成一个整体, 令 $x + y = A$, 则原式 $= A^2 + 2A + 1 = (A + 1)^2$.

再将 " A " 还原, 得原式 $= (x + y + 1)^2$.

上述解题时用到的是“整体思想”，整体思想是数学解题中常用的一种思想方法，请你解答下列问题：

- (1) 因式分解 $1 + 2(x - y) + (x - y)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) 因式分解 $(a + b)(a + b - 4) + 4$.
- (3) 求证：若 n 为正整数，则式子 $(n + 1)(n + 2)(n^2 + 3n) + 1$ 的值一定是某一个整数的平方 .

【答案】 (1) $(1 + x - y)^2$
(2) $(a + b - 2)^2$.
(3) 证明见解析 .

【解析】 (1) 令 $A = (x - y)$,
则原式 $= 1 + 2A + A^2 = (A + 1)^2$,
将 A 还原可得 $(1 + x - y)^2$.
(2) 原式 $= (a + b)^2 - 4(a + b) + 4$
 $= (a + b - 2)^2$.
(3) 原式 $= (n^2 + 3n + 2)(n^2 + 3n) + 1$
 $= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1$
 $= (n^2 + 3n + 1)^2$
 $\because n$ 为正整数 ,
 $\therefore n^2 + 3n + 1$ 为正整数 ,
 $\therefore (n + 1)(n + 2)(n^2 + 3n) + 1$ 的值一定是某一个整数的平方 .

【标注】【知识点】因式分解的应用

11. 有四块小场地，第一块是边长为 a 的正方形，第二块是边长为 b 的正方形，第三、四两块都是长为 a ，宽为 b 的长方形 .

- (1) 若另有一块大长方形场地，它的面积等于四块小场地面积之和，它的长为 $2(a + b)$ ，用简单的式子表示出大长方形的宽 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- (2)

前两块面积之和设为 S_1 ，后两块面积之和为 S_2 ，试比较 S_1, S_2 的大小关系： S_1 _____ S_2

(填不等号) .

(3) 当 a, b 满足 _____ 时， $S_1 = S_2$.

【答案】 (1) $\frac{1}{2}(a+b)$

(2) $\geq$

(3) $a = b$

【解析】 (1) 设大长方形宽为 c ，

$$a^2 + b^2 + 2ab = 2(a+b) \cdot c,$$

$$c = \frac{1}{2}(a+b),$$

所以大长方形宽为 $\frac{1}{2}(a+b)$.

(2) $S_1 = a^2 + b^2, S_2 = 2ab$,

$$S_1 - S_2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0,$$

所以 $S_1 \geq S_2$.

(3) 当 $S_1 = S_2$ 时， $a = b$.

【标注】【知识点】列代数式

12. 在日常生活中，取款、上网等都需要密码，为此，小明专门发明了一种用“因式分解”法产生的密码，方便记忆．原理是：如对于多项式 $x^4 - y^4$ ，因式分解的结果是 $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$ ，若取 $x=9, y=9$ 时，则各个因式的值是： $x-y=0, x+y=18, x^2+y^2=162$ ，于是就可以把“018162”作为一个六位数的密码．

(1) 对于多项式 $4x^3 - xy^2$ ，取 $x=10, y=10$ 时，写出用上述方法产生的密码：_____ 和 _____ .

(2) 对于多项式 $x^4y + xy^4$ 因式分解的结果是 $xy(x+y)(x^2-xy+y^2)$ ，当它的第一位因式码 xy 和第二位因式码 $(x+y)$ 构成的数是127时，第三位因式码 (x^2-xy+y^2) ：
：_____ 和 _____ .

【答案】 (1) 101030 ; 103010

(2) 13 ; 726

【解析】 (1) $4x^3 - xy^2 = x(2x + y)(2x - y)$, $2x + y = 30$, $2x - y = 10$.

(2) 将127拆成1 , 27或者12 , 7 ,

所以第三位因式码13或726 .

【标注】【知识点】因式分解的应用

13. 定义：若数 p 可以表示成 $P = x^2 + y^2 - xy$ (x, y 为自然数)的形式，则称 P 为“希尔伯特”数．

例如： $3 = 2^2 + 1^2 - 2 \times 1$, $39 = 7^2 + 5^2 - 7 \times 5$, $147 = 13^2 + 11^2 - 13 \times 11 \dots$

所以3 , 39 , 147是“希尔伯特”数．

(1) 请写出两个10以内的“希尔伯特”数．

(2) 像39 , 147这样的“希尔伯特”数都是可以用连续两个奇数按定义给出的运算表达出来，试说明所有用连续两个奇数表达出的“希尔伯特”数一定被4除余3．

(3) 已知两个“希尔伯特”数，它们都可以用连续两个奇数按定义给出的运算表达出来，且它们的差是224，求这两个“希尔伯特”数．

【答案】 (1) 0 , 1 , 3 , 4 , 7 , 9 .

(2) 证明见解析 .

(3) 327和103或903和679 .

【解析】 (1) $\because 0 = 0^2 + 0^2 - 0 \times 0$, $1 = 1^2 + 0^2 - 1 \times 0$, $3 = 2^2 + 1^2 - 2 \times 1$,

$4 = 2^2 + 0^2 - 2 \times 0$, $7 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 3$, $9 = 3^2 + 0^2 - 3 \times 0$,

$\therefore 10$ 以内的“希尔伯特”数有 $0, 1, 3, 4, 7, 9$.

(2) 设“希尔伯特”数为 $(2n+1)^2 + (2n-1)^2 - (2n+1)(2n-1)$. (n 为自然数)

$$\therefore (2n+1)^2 + (2n-1)^2 - (2n+1)(2n-1) = 4n^2 + 3,$$

$\therefore 4n^2$ 能被4整除,

$\therefore$ 所有用连续两个奇数表达出的“希尔伯特”数一定被4除余3.

(3) 设两个“希尔伯特”数分别为： $(2m+1)^2 + (2m-1)^2 - (2m+1)(2m-1)$ 和 $(2n+1)^2 + (2n-1)^2 - (2n+1)(2n-1)$. (m, n 为自然数).

由题意：

$$(2m+1)^2 + (2m-1)^2 - (2m+1)(2m-1) - [(2n+1)^2 + (2n-1)^2 - (2n+1)(2n-1)] = 224,$$

$$\therefore m^2 - n^2 = 56,$$

$$\therefore (m+n)(m-n) = 56,$$

$\therefore (m+n)$ 与 $(m-n)$ 均为正整数,

且 $(m+n)$ 与 $(m-n)$ 奇偶性相同,

$$\therefore \begin{cases} m+n=2 \\ m-n=28 \end{cases},$$

$$\text{或} \begin{cases} m+n=28 \\ m-n=2 \end{cases},$$

$$\text{或} \begin{cases} m+n=4 \\ m-n=14 \end{cases},$$

$$\text{或} \begin{cases} m+n=14 \\ m-n=4 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} m=15 \\ n=-13 \end{cases} \text{ (舍)},$$

$$\text{或} \begin{cases} m=15 \\ n=13 \end{cases},$$

$$\text{或} \begin{cases} m=9 \\ n=-5 \end{cases} \text{ (舍)},$$

$$\text{或} \begin{cases} m=9 \\ n=5 \end{cases},$$

$m=15, n=13$ 时, 这两个“希尔伯特”数分别为: 903, 679,

$m=9, n=5$ 时, 这两个“希尔伯特”数分别为: 327和103.

【标注】【知识点】因式分解的应用

二、分组分解法的应用

14. 若三角形的三条边的长分别为 a, b, c , 且 $a^2b - a^2c + b^2c - b^3 = 0$, 则这个三角形一定是 () .

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等边三角形

D. 等腰直角三角形

【答案】 A**【解析】** 分解因式，得

$$a^2b - a^2c + b^2c - b^3$$

$$= a^2(b - c) + b^2(c - b)$$

$$= (b - c)(a^2 - b^2)$$

$$= (b - c)(a + b)(a - b) .$$

$$\text{即 } (b - c)(a + b)(a - b) = 0 ,$$

$$\text{所以 } b = c \text{ 或 } a = b ,$$

所以这个三角形一定是等腰三角形，但不一定是直角三角形或等边三角形。

【标注】【知识点】因式分解的应用

15. 若 $x + y = -1$ ，则 $x^4 + 5x^3y + x^2y + 8x^2y^2 + xy^2 + 5xy^3 + y^4$ 的值等于 () .

A. 0

B. 1

C. -1

D. 3

【答案】 B**【解析】** $x^4 + 5x^3y + x^2y + 8x^2y^2 + xy^2 + 5xy^3 + y^4$

$$= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + (5x^3y + 5xy^3) + 6x^2y^2 + x^2y + xy^2$$

$$= (x^2 + y^2)^2 + 5xy(x^2 + y^2) + 6x^2y^2 + x^2y + xy^2$$

$$= (x^2 + y^2 + 2xy)(x^2 + y^2 + 3xy) + xy(x + y)$$

$$= (x + y)^2(x^2 + y^2 + 3xy) + xy(x + y)$$

$$= x^2 + y^2 + 3xy - xy$$

$$= x^2 + y^2 + 2xy$$

$$= (x + y)^2 = 1 .$$

【标注】【知识点】整式乘除化简求值-整体代入化简求值

16. 已知 $a - b = 3$ ， $b + c = -5$ ，则代数式 $a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ac$ 的值为 () .

A. 38

B. 19

C. -12

D. -6

【答案】 B

【解析】 $\because a - b = 3, b + c = -5, \therefore a + c = (a - b) + (b + c) = -2.$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab + 2bc + 2ac) = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b + c)^2 + (a + c)^2] \\ &= \frac{1}{2}(9 + 25 + 4) = 19.\end{aligned}$$

故选B.

【标注】【知识点】整式乘除化简求值-整体代入化简求值

17. 已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边长, 且满足 $a^2c^2 + a^4 = b^4 + b^2c^2$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 _____.

【答案】等腰三角形

【解析】因式分解得 $a^4 - b^4 + a^2c^2 - b^2c^2 = 0$,

$$\therefore (a + b)(a - b)(a^2 + b^2 + c^2) = 0,$$

$$\therefore a = b,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

【标注】【知识点】因式分解的应用

18. 某学校长方形操场的周长为440米, 操场的两条边 a, b 满足 $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 = 0$, 求操场的面积为 _____ 平方米.

【答案】12100

【解析】分解因式可得:

$$a^3 + a^2b - ab^2 - b^3,$$

$$= a^2(a + b) - b^2(a + b),$$

$$= (a^2 - b^2)(a + b),$$

$$= (a + b)^2(a - b),$$

$$\text{所以}(a + b)^2(a - b) = 0, \text{故} a = b,$$

$$\text{又}\because 2(a + b) = 440, \text{解得} a = b = 110,$$

$$\therefore S = 12100\text{m}^2.$$

【标注】【知识点】整式乘除与实际问题

19. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长, 且满足 $a^2b - ab^2 = bc - ac$, 试判断三角形的形状.

【答案】 $\triangle ABC$ 是等腰三角形 .

【解析】 $\because a^2b - ab^2 = bc - ac$,
 $\therefore a^2b - ab^2 - bc + ac = 0$,
 $\therefore ab(a - b) + c(a - b) = 0$,
 $\therefore (a - b)(ab + c) = 0$,
 $\therefore a - b = 0$, $ab + c = 0$ (舍去) ,
 $\therefore a = b$,
 $\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形 .

【标注】 【知识点】 三角形的三边关系

20. 已知 : $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, 且 $ac + bd = 0$, 求 $ab + cd$ 的值 .

【答案】 0 .

【解析】 $ab + cd = ab \times 1 + cd \times 1$
 $= ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2)$
 $= abc^2 + abd^2 + cda^2 + cdb^2$
 $= (abc^2 + cdb^2) + (adb^2 + cda^2)$
 $= bc(ac + bd) + ad(bd + ac)$
 $= (ac + bd)(bc + ad)$.
 $\because ac + bd = 0$,
 $\therefore$ 原式 = 0 .

【标注】【知识点】提公因式法

【知识点】分组分解法

【能力】运算能力

21. 已知 a 、 b 、 c 为 $\triangle ABC$ 的三边长，满足等式 $a^2 + 2ab - c^2 - 2bc = 0$ ，试判断 $\triangle ABC$ 的形状．

【答案】 $\triangle ABC$ 是等腰三角形．

【解析】 $\because a^2 - c^2 + 2ab - 2bc = 0$ ，
 $\therefore (a+c)(a-c) + 2b(a-c) = 0$ ，
 $\therefore (a-c)(a+c+2b) = 0$ ，
 $\because a$ 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 三边，
 $\therefore a+c+2b > 0$ ，
 $\therefore a-c = 0$ ，
即 $a = c$ ，
 $\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形．
故答案为： $\triangle ABC$ 是等腰三角形．

【标注】【知识点】因式分解的应用

22. 若 a ， b ， c 是三角形的三条边，求证： $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc < 0$ ．

【答案】证明见解析．

【解析】 $\because a^2 - b^2 - c^2 - 2bc = a^2 - (b + c)^2 = (a - b - c)(a + b + c)$,

$\because a, b, c$ 是三角形的三条边,

$\therefore a + b + c > 0, a < b + c$,

$\therefore (a - b - c)(a + b + c) < 0$,

即 $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc < 0$.

【标注】【知识点】因式分解的应用

23. 已知 $a > b > c > 0$, 求适合等式 $abc + ab + cb + ca + a + b + c = 1989$ 的整数 a, b, c 的值为多少?

【答案】 $a = 198, b = 4, c = 1$.

【解析】 $\because abc + ab + cb + ca + a + b + c = 1989$

$\therefore (a + 1)(b + 1)(c + 1) = 1990$

而1990若被表示为三个互不相等的自然数乘积只有下面四种方式:

$1990 = 199 \times 5 \times 2 = 199 \times 10 \times 1 = 398 \times 5 \times 1 = 995 \times 2 \times 1$

又 $\because a > b > c$

$\therefore a + 1 = 199, b + 1 = 5, c + 1 = 2$

或 $a + 1 = 199, b + 1 = 10, c + 1 = 1$

或 $a + 1 = 398, b + 1 = 5, c + 1 = 1$

或 $a + 1 = 995, b + 1 = 2, c + 1 = 1$

$\because c > 0$

$\therefore a = 198, b = 4, c = 1$.

【标注】【知识点】因式分解的应用

24. 已知在 $\triangle ABC$ 中, 三边长 a, b, c 满足等式 $a^2 - 16b^2 - c^2 + 6ab + 10bc = 0$. 求证: $a + c = 2b$

【答案】证明见解析 .

【解析】 $a^2 - 16b^2 - c^2 + 6ab + 10bc$
 $= (a^2 + 6ab + 9b^2) - (25b^2 - 10bc + c^2)$
 $= (a + 3b)^2 - (5b - c)^2$
 $= (a + 8b - c)(a - 2b + c)$.
 $\because a, b, c$ 为三角形三边长 ,
 $\therefore a + b - c > 0, a + 8b - c = (a + b - c) + 7b > 0$.
故由条件只有 $a - 2b + c = 0, a + c = 2b$.

【标注】【知识点】三角形的三边关系

25. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边 , 当 $b^2 + 2ab = c^2 + 2ac$ 时 .

- (1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状 , 并说明理由 .
- (2) 若 $a = 4, b = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的周长 .

【答案】(1) $\triangle ABC$ 是等腰三角形 , 证明见解析 .

(2) 10 .

【解析】(1) $\triangle ABC$ 是等腰三角形 , 理由如下 :

$$\begin{aligned} &\because a, b, c \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的三条边的长 , } b^2 + 2ab = c^2 + 2ac , \\ &\therefore b^2 - c^2 + 2ab - 2ac = 0 , \\ &\text{因式分解得 : } (b - c)(b + c + 2a) = 0 , \\ &\therefore b - c = 0 , \end{aligned}$$

$$\therefore b = c,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

$$(2) a = 4, b = c = 3,$$

$$\therefore C_{\triangle ABC} = a + b + c = 10.$$

【标注】【知识点】因式分解的应用

26. 回答下列各题.

(1) 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长, 试判断代数式 $(a^2 + b^2 - c^2)^2$ 与 $4a^2b^2$ 的大小.

(2) 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长, 且 $2a^3 + 4a^2b - 2a^2c = 4abc$, 则 $\triangle ABC$ 是什么三角形?

【答案】 (1) $(a^2 + b^2 - c^2)^2 < 4a^2b^2$.

(2) 等腰三角形.

【解析】 (1) $(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c)$,

$\therefore$ 根据三角形三边关系得 $(a^2 + b^2 - c^2)^2 < 4a^2b^2$.

(2) 根据 $2a^3 + 4a^2b - 2a^2c = 4abc$ 可以得到: $(a + 2b)(a - c) = 0$,

$$\therefore a = c,$$

所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

【标注】【知识点】因式分解的应用; 利用平方差公式因式分解

27. 阅读下列材料:

常用分解因式的方法有提取公因式法、公式法及十字相乘法, 但有部分多项式只单纯用上述方法就无法分解, 如 $x^2 - 2xy + y^2 - 16$, 我们细心观察这个式子就会发现, 前三项符合完全平方公式, 进行变形后可以与第四项结合再运用平方差公式进行分解. 过程如下:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 16 = (x - y)^2 - 16 = (x - y + 4)(x - y - 4).$$

这种分解因式的方法叫分组分解法. 利用这种分组的思想方法解决下列问题:

(1) 填空: 分解因式: $x^2 - 2xy + y^2 - 9 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 分解因式： $x^2 - 4y^2 - 2x + 4y$.

(3) $\triangle ABC$ 三边 a, b, c 满足 $a^2 + c^2 + 2b^2 - 2ab - 2bc = 0$, 判断 $\triangle ABC$ 的形状, 并说明理由 .

【答案】 (1) $(x - y + 3)(x - y - 3)$

(2) $(x - 2y)(x + 2y - 2)$.

(3) 等边三角形 . 证明见解析 .

【解析】 (1) $x^2 - 2xy + y^2 - 9$

$$= (x - y)^2 - 9$$

$$= (x - y + 3)(x - y - 3) .$$

(2) $x^2 - 4y^2 - 2x + 4y$

$$= (x + 2y)(x - 2y) - 2(x - 2y)$$

$$= (x - 2y)(x + 2y - 2) .$$

(3) $a^2 + c^2 + 2b^2 - 2ab - 2bc$

$$= a^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2bc + b^2$$

$$= (a - b)^2 + (c - b)^2 = 0 .$$

$$\therefore a = b, b = c ,$$

$$\therefore a = b = c .$$

【标注】 【能力】 运算能力

【能力】 抽象概括能力

【能力】 推理论证能力

【知识点】 配方思想的运用

【知识点】 分组分解法

【知识点】 提公因式+平方差

【知识点】 利用平方差公式因式分解

【知识点】 利用完全平方公式因式分解

【知识点】 提公因式法

【思想】类比思想

【思想】转化与化归思想

28. 观察“探究性学习”小组的同学分解因式：

$x^2 - xy + 4x - 4y = (x^2 - xy) + (4x - 4y) = x(x - y) + 4(x - y) = (x + 4)(x - y)$ 这种分解因式的方法叫“分组分解法”，请你利用这种方法解决下列问题：

已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边长．

(1) 若 $a^2 - ab + bc - ac = 0$ ，请判断 $\triangle ABC$ 的形状．

(2) 比较 $a^2 - b^2$ 与 $c^2 - 2bc$ 的大小．

【答案】(1) $\triangle ABC$ 为等腰三角形．

(2) $a^2 - b^2 > c^2 - 2bc$ ．

【解析】(1)
$$\begin{aligned} & a^2 - ab + bc - ac \\ &= a(a - b) + c(b - a) \\ &= (a - b)(a - c) \\ &= 0 \\ &\therefore a = b \text{ 或 } a = c, \\ &\therefore \triangle ABC \text{ 为等腰三角形.} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} & a^2 - b^2 - (c^2 - 2bc) \\ &= a^2 - b^2 - c^2 + 2bc \\ &= a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) \\ &= a^2 - (b - c)^2 \\ &= (a + b - c)(a - b + c), \\ &\because a + b > 0, a + c > b, \\ &\therefore a + b - c > 0, a - b + c > 0, \\ &\therefore \text{原式} > 0, \\ &\therefore a^2 - b^2 > c^2 - 2bc. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】分组分解法

【知识点】等腰三角形的判定-两边相等

【能力】运算能力

29. 已知： $\triangle ABC$ 的三边为 a 、 b 、 c 。

- (1) 因式分解： $a^2 - b^2 + 2c(a - b)$ 。
- (2) 若 $a^2 - b^2 + 2ac - 2bc = 0$ ，求证： $a = b$ 。
- (3) 求证： $a^2 + b^2 + 2ab - c^2 > 0$ 。

【答案】(1) 原式= $(a - b)(a + b + 2c)$ 。

(2) 证明见解析。

(3) 证明见解析。

【解析】(1) 原式= $(a - b)(a + b) + 2c(a - b)$
 $= (a - b)(a + b + 2c)$ 。

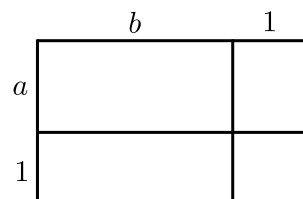
(2) $\because a^2 - b^2 + 2ac - 2bc = 0$ ，
 $\therefore (a - b)(a + b) + 2c(a - b) = 0$ ，
 $\therefore (a - b)(a + b + 2c) = 0$ ，
又 $\because \triangle ABC$ 的三边为 a 、 b 、 c ，
 $\therefore a + b + 2c > 0$ ，
 $\therefore a - b = 0$ 即 $a = b$ 。

(3) 原式= $(a + b)^2 - c^2$
 $= (a + b + c)(a + b - c)$ ，
 $\because$ 三角形 $\triangle ABC$ 的三边为 a 、 b 、 c ，
 $\therefore a + b + c > 0$ ， $a + b > c$ ，
 $\therefore a + b - c > 0$ ，
 $\therefore a^2 + b^2 + 2ab - c^2 > 0$ 。

【标注】【知识点】因式分解的应用

30. 因式分解可以解决很多数学问题，下面的问题都与因式分解有关．

- (1) 如图4个小长方形拼成一个大长方形，图中标注的数据是一些线段的长度，请你根据这个图形的面积关系，写出一个因式分解的等式．



- (2) 多项式 $ab + a + b + 1$ 的因式分解过程可以是这样的：

$ab + a + b + 1 = a(b + 1) + (b + 1) = (a + 1)(b + 1)$ ，这种因式分解的方法叫做分组分解法，请你模仿这样的方法对多项式 $xy + 3x + 3y + 9$ 进行因式分解．

- (3) 设(1)中的大长方形面积为 S ，周长为 C ，其中 a, b 为正整数，问在2018, 2019, 2020三个数之中，有没有不可能是 $S + C$ 的值？请说明理由．

- (4) 积累了以上解题经验后，请你解决下面问题：

黑板上写有 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}$ 共100个数，每次操作先从黑板上100数中任选取两个数 a, b ，然后删去 a, b ，并写上数 $a + b + ab$ ，如选取的数是 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{4}$ ，则去掉 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{4}$ 并写上 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$ ，经过99次操作后，黑板上剩下的数是什么？说明理由．

【答案】 (1) $ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$ ．

(2) $(x + 3)(y + 3)$ ．

(3) 都可能是 $S + C$ 的值．

(4) 100．

【解析】 (1) 由已知长度可得大长方形的面积为： $(a + 1)(b + 1)$ ，

拆分成四个小长方形的面积之和为： $ab + a + b + 1$ ，

因此 $ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$ ．

(2) $xy + 3x + 3y + 9$

$= x(y + 3) + 3(y + 3)$

$$= (x+3)(y+3).$$

$$(3) S+C=ab+a+b+1+2a+2b+4$$

$$=ab+3a+3b+5$$

$$= (a+3)(b+3)-4,$$

经检验2018, 2019或2020皆符合题意, 所以都可能是 $S+C$ 的值.

(4) 由 $a+b+ab+1=(a+1)(b+1)$ 得, 每次操作前后, 黑板上的每两个数加1的乘积不变, 设经过99次操作后, 黑板上剩下的数为 x .

$$\text{则 } x+1 = (1+1) \times \left(\frac{1}{2}+1\right) \times \left(\frac{1}{3}+1\right) x \cdots x \left(\frac{1}{100}+1\right), \text{ 解得 } x=100$$

.

故剩下的数为100.

【标注】【知识点】因式分解的应用